# Pochodne cząstkowe. Pochodna kierunkowa. Różniczka funkcji wielu zmiennych.

Anna Bahyrycz

## Pochodne cząstkowe

### Definicja 1

*Niech funkcja $f$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu $(x_0, y_0)$.*

*Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji $f$ względem zmiennej $x$ w punkcie $(x_0, y_0)$ nazywamy granicę*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

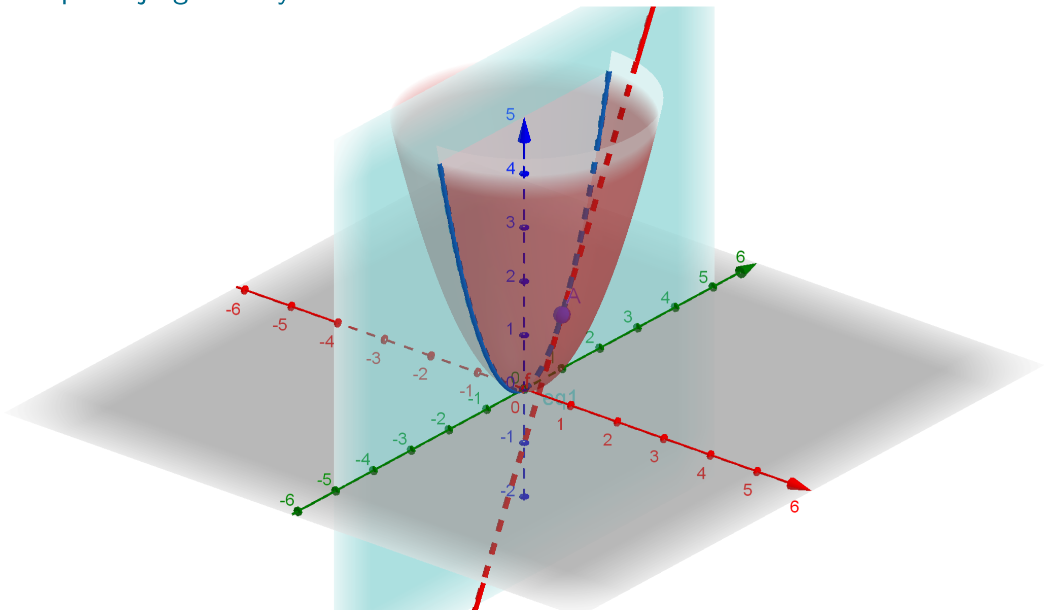
*o ile istnieje i oznaczamy symbolem* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *lub* $f'_x(x_0, y_0)$.

*Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji $f$ względem zmiennej $y$ w punkcie $(x_0, y_0)$ nazywamy granicę*

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

*o ile istnieje i oznaczamy symbolem* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *lub* $f'_y(x_0, y_0)$.

## Interpretacja geometryczna



### Uwaga 1

*Jeżeli granica określająca pochodną jest właściwa (niewłaściwa) to, mówimy, że pochodna jest właściwa (niewłaściwa).*

### Uwaga 2

*Nie ma żadnego związku między ciągłością funkcji a istnieniem pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji w punkcie.*

## Przykład 1

*Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & dla \quad xy = 0 \\ 0 & dla \quad xy \neq 0 \end{cases} \qquad \text{w punkcie } (x_0,y_0) = (0,0).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1-1}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1-1}{\Delta y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

*Niech* $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},0\right)$ *oraz* $(x'_n,y'_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ *, oczywiście*

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n},0\right) = (0,0) \ \text{ i } \left(\frac{1}{n},0\right) \neq (0,0) \ \text{ dla } n\in\mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty} (x'_n,y'_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = (0,0) \ \text{ i } \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \neq (0,0) \ \text{ dla } n\in\mathbb{N}.$$

*Wówczas* $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = 1, \ \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = 0$ *- badana granica nie istnieje.*

*Funkcja* $f$ *ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w* $(0,0)$ *i nie jest ciągła w tym punkcie.*

## Definicja 2

*Jeżeli funkcja* $f$ *ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego* $U \subset \mathbb{R}^2$*, to funkcje*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \text{gdzie} \quad (x,y)\in U$$

*nazywamy pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji* $f$ *na zbiorze* $U$
*i oznaczmy* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *lub* $f'_x$, $f'_y$.

## Uwaga 3

*W praktyce do liczenia pochodnych cząstkowych można stosować reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej.*

## Przykład 2

*Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{w punkcie } (x_0,y_0) = (0,0).$$

*Badamy istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \text{ - granica nie istnieje,}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\sqrt{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} \text{ - granica nie istnieje,}$$

*czyli funkcja* $f$ *nie ma pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu w* $(0,0)$. *Badamy ciągłość*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

*Funkcja* $f$ *jest ciągła w* $(0,0)$ *.*
*Z ciągłości funkcji w punkcie nie wynika istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu w tym punkcie.*

## Przykład 3

*Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji*

$$f(x,y) = x^y, \quad \text{na zbiorze} \quad U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \wedge y>0\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x, \quad \text{gdzie} \quad (x,y)\in U.$$

## Definicja 3

*Niech funkcja $f$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ przynajmniej na otoczeniu punktu $(x_0, y_0)$. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $f$*
*w punkcie $(x_0, y_0)$ określamy wzorami*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)(x_0, y_0).$$

*Powyższe pochodne oznacza się również odpowiednio przez*

$$f''_{xx}(x_0, y_0),\ f''_{xy}(x_0, y_0),\ f''_{yx}(x_0, y_0),\ f''_{yy}(x_0, y_0)\ .$$

## Definicja 4

*Jeżeli funkcja $f$ ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^2$, to funkcje*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \quad \textit{gdzie} \quad (x, y) \in U$$

*nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji $f$ na zbiorze $U$*
*i oznaczmy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ lub $f''_{xx}$, $f''_{xy}$, $f''_{yx}$, $f''_{yy}$ .*

## Twierdzenie 1 (Schwarza o pochodnych mieszanych)

*Jeżeli pochodne cząstkowe*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

*są ciągłe w punkcie $(x_0, y_0)$, to są równe, tj.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

## Uwaga 4

*Prawdziwe są także analogiczne równości dla pochodnych mieszanych drugiego rzędu funkcji trzech zmiennych, a także dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.*

## Przykład 4

*Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji*

$$f(x, y) = x^y, \quad \textit{na zbiorze} \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

*Sprawdzić, że pochodne mieszane są równe.*
*Wyznaczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1} \quad \textit{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x, \quad \textit{gdzie} \quad (x, y) \in U.$$

*Wyznaczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y(y-1)x^{y-2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^y (\ln x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \textit{gdzie} \quad (x, y) \in U.$$

## Definicja 5

*Niech funkcja $f$ ma pochodne cząstkowe rzędu $n \geq 2$ przynajmniej na otoczeniu punktu $(x_0, y_0)$. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(x_0, y_0)$ pochodnych cząstkowych rzędu $n$ funkcji $f$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi rzędu $n+1$ funkcji $f$ w punkcie $(x_0, y_0)$.*
*Jeżeli funkcja $f$ ma pochodne cząstkowe rzędu $n$ w każdym punkcie zbioru otwartego, to mówimy, że na tym zbiorze określone są pochodne cząstkowe rzędu $n$ funkcji $f$.*
*Pochodną cząstkową $n$-tego rzędu funkcji $f$ w punkcie $(x_0, y_0)$, powstałą w wyniku $k$-krotnego różniczkowania względem zmiennej $x$ i następnie $l$-krotnego różniczkowania względem zmiennej $y$ gdzie $k + l = n$, oznaczamy przez*

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^l \partial x^k}(x_0, y_0).$$

## Przykład 5

*Dla funkcji*

$$f(x,y) = e^{xy} \quad \text{obliczyć} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y).$$

*Wyznaczamy*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy},$$

*następnie*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}\right) = e^{xy} + xye^{xy}$$

*i na koniec*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}(1+xy)\right) = y(1+xy)e^{xy} + ye^{xy} = e^{xy}y(2+xy).$$

## Definicja 6 (Pochodna kierunkowa funkcji)

*Niech funkcja $f$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu $(x_0, y_0)$ oraz $\vec{v} = (v_x, v_y)$ będzie wersorem. Pochodną kierunkową funkcji $f$ w punkcie $(x_0, y_0)$ w kierunku $\vec{v}$ określamy wzorem:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

## Przykład 6

*Korzystając z definicji obliczyć pochodną kierunkowa funkcji*

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2, \quad \text{w punkcie } (1,1) \text{ w kierunku wersora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{3\left(1 + t\sqrt{2} + \frac{1}{2}t^2\right) - 3}{t} = \lim_{t\to 0^+}\left(3\sqrt{2} + \frac{3}{2}t\right) = 3\sqrt{2}.$$

## Przykład 7

*Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(0,0)$ w kierunku*

(a) *wersora* $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; (b) *dowolnego wersora* $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(0 - \frac{3}{5}t, 0 + \frac{4}{5}t\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{9}{25}t^2 + \frac{16}{25}t^2} - 0}{t}$$

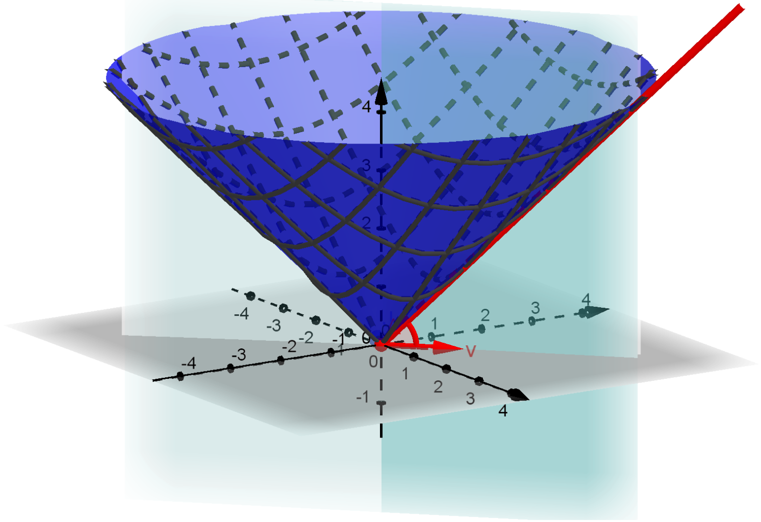
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = 1.$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(0 - tv_x, 0 + tv_y\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}|t|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = 1.$$

*Pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(0,0)$ w kierunku dowolnego wersora istnieje i wynosi $1$.*

## Interpretacja geometryczna




Wróćmy do Przykładu 6.

## Przykład 8

*Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji*

$f(x,y) = 2x^2 + y^2$ *w punkcie* $(1,1)$ *w kierunku wersora* $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

*Pochodne cząstkowe* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ *są funkcjami ciągłymi,zatem*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \mathbf{grad} f(1,1) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (4,2) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Do Przykładu 7 nie możemy zastosować Twierdzenia 2, ponieważ pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f$ w punkcie $(0,0)$ nie istnieją.

## Definicja 7 (Gradient funkcji)

*Gradientem funkcji* $f$ *w punkcie* $(x_0,y_0)$ *nazywamy wektor określony wzorem:*

$$\mathbf{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

## Twierdzenie 2

*Jeżeli pochodne cząstkowe* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *są funkcjami ciągłymi w punkcie* $(x_0,y_0)$ *oraz*
$\vec{v}$ *jest dowolnym wersorem na płaszczyźnie, to*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \mathbf{grad} f(x_0,y_0) \circ \vec{v}.$$

## Definicja 8 (Różniczkowalność funkcji)

*Niech funkcja* $f$ *ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie* $(x_0,y_0)$. *Mówimy, że funkcja* $f$ *jest różniczkowalna w* $(x_0,y_0)$, *gdy*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

## Przykład 9

*Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & dla \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & dla \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad \textit{w punkcie } (x_0,y_0)=(0,0).$$

*Zaczniemy od policzenia pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji $f$ punkcie $(0,0)$:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

*Zatem* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ *i pozostaje zbadać czy istnieje i ile wynosi*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}-0-h\cdot 0-k\cdot 0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}=? \quad (*)$$

## Interpretacja geometryczna funkcji różniczkowalnej w punkcie

Różniczkowalność funkcji $f$ w punkcie $(x_0,y_0)$ oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna (niepionowa) do wykresu tej funkcji w punkcie $\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)$.

## Twierdzenie 5

*Niech funkcja $f$ ma ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $(x_0,y_0)$. Wówczas płaszczyzna styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)$ ma postać:*

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

## Twierdzenie 3 (Warunek konieczny różniczkowalności funkcji)

*Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie to jest ciągła w tym punkcie.*

## Uwaga 5

*Funkcja z Przykładu 1 nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie jest ciągła w tym punkcie.*

## Uwaga 6

*Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 3 nie jest prawdziwe.*
*Funkcja z Przykładu 2 jest ciągła w punkcie $(0,0)$ a nie jest jest w tym punkcie różniczkowalna, bo nie istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f$ w punkcie $(0,0)$.*

## Twierdzenie 4 (Warunek wystarczający różniczkowalności funkcji)

*Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ są funkcjami ciągłymi w punkcie $(x_0,y_0)$, to funkcja $f$ jest różniczkowalna w tym punkcie.*

## Uwaga 7

*Funkcje z Przykładów 5 i 6 są różniczkowalne w każdym punkcie $\mathbb{R}^2$.*

## Przykład 10

*Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji*

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{arctg}x}{1+y^2} \qquad \textit{w punkcie } P=\Big(1,0,\frac{\pi}{4}\Big).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\mathrm{arctg}x\cdot\frac{2y}{(1+y^2)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0.$$

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

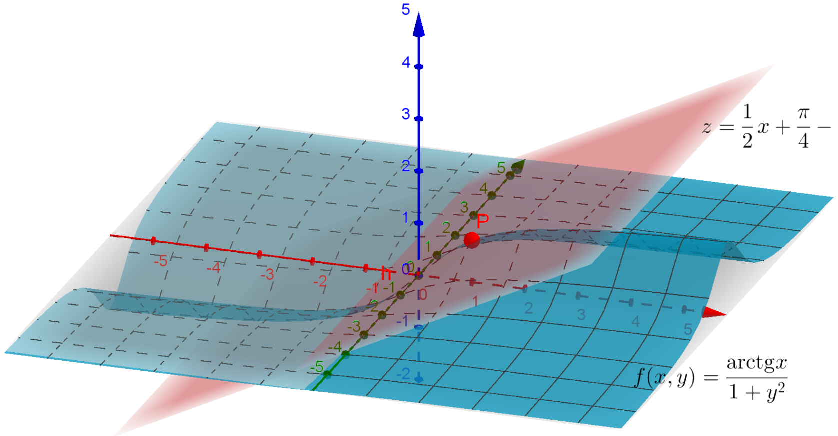
$$z-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)+0\cdot(y-0)$$

*Zatem*

$$z=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

*jest równaniem płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f$ w punkcie $P$.*

## Interpretacja geometryczna




## Interpretacja geometryczna